6M

УДК 51(071)

Л.П. Мироненко, И.В. Петренко
Донецкий национальный технический университет
Украина, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Признак сравнения с параметром в теории числовых рядов

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko
Donetsk National Technical University
Ukraine, 83001, c. Donetsk, Artema st., 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Test of Comparison with Parameter in the Theory of Number Series

Л.П. Мироненко, І.В. Петренко
Донецький національний технічний університет
Украина Україна, 83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58, mironenko.leon@yandex.ru, eagor0@mail.ru

Ознака порівняння з параметром у теорії числових рядів

В работе предложены две формы записи признака сравнения в предельной форме для оценки сходимости числовых рядов и несобственных интегралов. Показано, что обобщенно гармонический ряд имеет намного большие возможности, чем это было принято. В частности, доказано, что обобщенно гармонический ряд может быть использован в качестве эталонного для получения признаков Даламбера и Коши. Признак с параметром позволяет широко использовать правило Лопиталя для оценки сходимости рядов.
Ключевые слова: ряд, сходимость, гармонический ряд, признаки сравнения, правило Лопиталя, предел, интегральный признак.

In the paper, two forms of limiting comparison tests for estimation of convergence of the number series and improper integrals are proposed. It is shown that the Riemann zeta-function $\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$ allows to formulate the new necessary test of convergence of the series to get such well-known tests as Cauchy's Root Test and d'Alembert's Ratio Test. The new test with a parameter allows to use l'Hopital's rule more effectively.
Key Words: series, convergence, zeta-function, comparison tests, l'Hopital's rule, limit, integral test

У роботі запропоновано дві форми ознаки порівняння в граничній формі для оцінки збіжності числових рядів і невластивих інтегралів. Доведено, що гармонічний ряд загального вигляду має значно більше можливостей, ніж це прийнято в офіційній літературі. Наприклад, використання цієї ознаки дозволяє сформулювати підсилену необхідну ознаку збіжності числових рядів і може бути застосовано до отримання ознак Даламбера і Коші. Запис ознаки з параметром дозволяє ефективно використовувати правило Лопиталя, щодо оцінки збіжності рядів.
Ключові слова: ряд, збіжність, розбіжність, гармонічний ряд, ознаки порівняння, правило Лопиталя, границя, інтегральна ознака.

Введение

Признак сравнения рядов с положительными членами в теории числовых рядов обычно используется в двух формах – конечной и предельной. В первом случае сравниваются члены двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n \ge 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, $v_n \ge 0$. Если существует

число $M>0$, такое, что с некоторого номера N выполняется неравенство $u_n \le M \cdot v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ [1].

В предельном признаке сравнения рассматривается предел $\lim_{n\to\infty} u_n / v_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n>0$ сходится, а величина предела равна $C<\infty$ или равна нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, а величина предела равна $C<\infty$, или равна бесконечности, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также расходится [1], [2].

В качестве ряда сравнения обычно выбирается один ряд из трех эталонных – гармонический, с общим членом $v_n = 1/n$, обобщенно гармонический – $v_n = 1/n^{\alpha}$ и ряд геометрической прогрессии – $v_n = q^n$.

В работе сосредоточимся на обощенно гармоническом ряде и сформулируем признак сравнения в виде, пригодном для использования правила Лопиталя раскрытия неопределенностей, которые возникают из необходимого признака сходимости рядов $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

1 Предельный признак сравнения с параметром

Запишем предельный признак сравнения произвольного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \ge 0$ и обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n = 1/n^{\alpha}, \alpha>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1/n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot u_n .$$

Полагая $\alpha = \beta + 1$, учтем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} = \begin{cases} \beta > 0 - сходится \\ \beta \le 0 - расходится \end{cases}$, приходим к следующему признаку сходимости: если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta+1} \cdot u_n = C < \infty \tag{1}$$

и, при этом, $\beta>0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \ge 0$ сходится; во всех остальных случаях $\beta \le 0$ (или предел равен бесконечности, или предел не существует) – расходится.

Признаку (1), который будем называть признаком сравнения с параметром (в данном случае β), можно придать другой вид, непосредственно применив правило Лопиталя. Действительно, по необходимому признаку сходимости числовых рядов $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $u_n^{-1} = 1/u_n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta} \lim_{n\to\infty} n \cdot u_n = \lim_{n\to\infty} n^{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{u_n^{-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{n'}{\left(u_n^{-1}\right)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta}}{\left(u_n^{-1}\right)'} .$$

В результате, формула (1) примет вид

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta} / \left(u_n^{-1}\right)' = C < \infty . \tag{2}$$

Демонстрируем признак сходимости (2) на примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta}}{\left(\sqrt{n}\right)'}=2\lim_{n\to\infty}n^{\beta}\sqrt{n}=\infty,$$

Поскольку при любом $\beta>0$ данный предел равен бесконечности.

2 Некоторые следствия из признака сходимости с параметром

Усиленный необходимый признак сходимости числовых рядов с положительными членами. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ u_n>0$ сходится. Тогда выполняется равенство (1) при некотором $\beta>0$. Перепишем формулу (1) в виде

$$\lim_{n\to\infty}n^{\beta+1}u_n=\lim_{n\to\infty}n^{\beta}\cdot nu_n=\lim_{n\to\infty}n^{\beta}\cdot\lim_{n\to\infty}nu_n=C<\infty. \quad (3)$$

Предположим, что $\lim_{n\to\infty}n^{\beta}=\infty$ при любом $\beta>0$, то $\lim_{n\to\infty}nu_n=0$. Отсюда следует необходимое условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ u_n\geq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}nu_n=0. \quad (4)$$

Аналогично, из формулы (2) следует еще одна форма записи необходимого признака сходимости

$$\lim_{n\to\infty}1/\left(u_n^{-1}\right)'=0. \quad (5)$$

Признаки (4) и (5) имеют более широкие возможности, чем общепринятый необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Например, известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/\sqrt{n}$ расходится, хотя для него общепринятый необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}1/\sqrt{n}=0$ выполняется.

Очевидно, что сделать вывод о сходимости или расходимости ряда невозможно, исходя только из общепринятого необходимого признака сходимости $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

В то же время, по формуле (4) наш, будем его называть ***усиленный необходимый признак сходимости,*** $\lim_{n\to\infty}nu_n=\lim_{n\to\infty}n/\sqrt{n}=\infty$ не выполняется, следовательно, можно делать вывод о том, что ряд расходится.

Радикальный признак Коши. Радикальный признак Коши легко получить из предельного признака (1). Для этого выполним преобразования в формуле (1): $\lim_{n\to\infty}n^{\beta+1}\cdot u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^{\beta+1}\cdot u_n}\right)^n$. Чтобы предел имел конечное значение, основание $\sqrt[n]{n^{\beta+1}\cdot u_n}$ степени n должно удовлетворять неравенству $\sqrt[n]{n^{\beta+1}\cdot u_n}<1$, начиная с некоторого номера N_o. То есть мы приходим к радикальному признаку Коши в конечной форме

$$\sqrt[n]{n^{\beta+1}\cdot u_n}<1,\quad \beta>0. \quad (6)$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учтем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\beta+1}} = 1$. Тогда получится хорошо известный радикальный признак Коши $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \le 1$ [3]. Знак равенства в пределе появляется из известных свойств пределов [4].

Замечание. Знак равенства при вычислении предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^{\beta+1} \cdot u_n}\right)^n$ приводит к неопределенности $\{1^\infty\}$, поэтому такой случай требует дополнительного исследования. Обычно используется более тонкий признак сходимости.

Обратим внимание на то, что радикальный признак Коши в конечной форме (6) зависит от параметра β, а в предельной форме – не зависит.

Если повторить рассуждения для другой формы записи предельного признака (2), то получим аналог признака Коши $\lim\limits_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{\left(u_n^{-1}\right)'} \le 1$.

Признак Даламбера. Признак Даламбера также следует из признака сравнения в предельной форме (1): $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \cdot u_n = C < \infty$. Так,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha .$$

Для того, чтобы предел имел конечное значение, должно выполняться неравенство $\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n} < 1$ (необходимое условие сходимости ряда, начиная с некоторого номера N_o). Мы приходим к признаку Даламбера в конечной форме

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha}, \ \alpha > 1. \tag{7}$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учтем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1$, тогда получим признак Даламбера в предельной форме $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$. Также как и в случае признака Коши, знак равенства в пределе появляется из известных свойств пределов [4], и также, как в случае признака Коши, знак равенства приводит к неопределенности. Поэтому такой случай требует дополнительного исследования.

Обратим внимание на то, что признак Даламбера в конечной форме (7) зависит от параметра $\alpha = 1 + \beta$, а в предельной форме – не зависит.

Сравнение с рядом геометрической прогрессии. Применим признак сравнения к ряду геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, который, как известно, сходится при $q < 1$ и расходится при $q \ge 1$. Согласно формуле (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\beta+1} \cdot q^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^{\beta+1}} \cdot q\right)^n$. Для того, чтобы предел имел конечное значение, основание $\sqrt[n]{n^{\beta+1}} \cdot q$ степени n должно удовлетворять неравенству $\sqrt[n]{n^{\beta+1}} \cdot q < 1$, начиная с некоторого номера N_o. Перейдем в неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учтем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\beta+1}} = 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^{\beta+1}} \cdot q\right) = q \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\beta+1}} = q < 1 .$$

Как видно, предельный признак сравнения с параметром однозначно устанавливает факт сходимости геометрического ряда при $q<1$.

Нечувствительность результата к параметру β означает, что ряд геометрической прогрессии имеет скорость сходимости выше, чем обобщенно гармонический ряд.

Сравнение с признаком сравнения в конечной форме. Признаки сравнения (1) – (2) во многих случаях эффективно заменяют признак сравнения в конечной форме. Проще демонстрировать это типичным примером ряда $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\ln n$, к которому обычно применяют признак сравнения в конечной форме. Рядом сравнения в этом случае обычно является гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Из неравенства $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ при $n \ge 2$ следует расходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\ln n$. С другой стороны, по формуле (2) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta}}{(\ln n)'} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta+1} = \infty \quad \forall \beta > 0.$$

Следовательно, ряд расходится.

Рассмотрим пример, когда без признака сравнения в конечной форме обойтись трудно, но можно совместить оба признака. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$.

По формуле (1) имеем

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta+1} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta-1} \sin^2 n\alpha \le \lim_{n\to\infty} n^{\beta-1} = 0 \quad \exists\, 0<\beta<1.$$

Сравнение с интегральным признаком Коши. Напомним, что интегральный признак Коши устанавливает равноправие в вопросе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ [5].

$$\textit{If} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ сходится} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится.}$$

Покажем, как предельный признак сравнения может работать наряду с интегральным признаком. Для этого рассмотрим пример расходящегося ряда $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n \cdot \ln n$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln 2 = +\infty.$$

Проведем оценку сходимости без вычисления интеграла, а с помощью признака сравнения по формуле (1)

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta+1} \frac{1}{n\ln n} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta-1} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta-1} \lim_{n\to\infty} \frac{n'}{(\ln n)'} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta} = \infty \quad \forall \beta > 0.$$

В данном случае работает правило – дифференцировать проще, чем интегрировать.

Заметим, что в данном случае использовано правило Лопиталя, которое не всегда работает при оценке сходимости рядов. Например, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n \cdot \ln^2 n$ сходится. Покажем это с помощью интегрального признака Коши

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\ln x}\Big|_2^b = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

В то же время признак сравнения дает ошибочный результат

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta+1}\frac{1}{n\ln^2 n}=\lim_{n\to\infty} n^{\beta-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^2 n}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty} n^{\beta-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n'}{\left(\ln^2 n\right)'}=\lim_{n\to\infty} n^{\beta-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\beta-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n'}{2\left(\ln n\right)'}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{\beta}=\infty \quad \forall\beta>0.$$

Объяснение простое. После первого применения правила Лопиталя, сравниваются скорости изменения функций x и $\ln x$, причем у первой из них скорость постоянна и равна 1, а у второй – $1/x$, которая стремится к нулю при $x\to\infty$.

Последний пример устанавливает существенное ограничение на область применения признака сравнения с параметром. Нижней границей являются ряды, содержащие члены с логарифмами. В этом случае данный признак может дать как правильный результат, так и ошибочный.

Несобственные интегралы. Интегральный признак Коши позволяет перенести ряд полученных признаков (1), (2), (4) – (7) для числовых рядов на несобственные интегралы первого рода. Так, признак (1) для несобственных интегралов звучит так: ***если выполняется условие*** $\lim_{x\to+\infty} x^{\beta+1}f(x)=C<\infty$***, при этом*** $\beta>0$***, то интеграл*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится.***

Кратко: $$if\ \exists\beta>0:\lim_{x\to+\infty} x^{\beta+1}f(x)=C<\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \ \ сходится\ . \qquad (8)$$

Аналогично преобразуем признак (2) для интегралов. Заметив, что при $\beta>0$ и $f(x)\to 0$ имеем неопределенность $\{\infty\cdot 0\}$, которую преобразуем в $\{\infty/\infty\}$. В этом случае $f^{-1}(x)=\varphi(x)\to\infty$.

Применим правило Лопиталя и получим признак сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$:

$$If\ \exists\beta>0:\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta}}{\varphi'(x)}=C<\infty,\varphi(x)=1/f(x)\Rightarrow\int_1^{+\infty} f(x)dx\ \ сходится\ . \qquad (9)$$

Пример. Сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\ln\left(\cos(1/x)\right)dx$ можно доказать с помощью разложения подынтегральной функции в окрестности точки $y=1/x\cong 0$. При $x\to\infty$ имеем: $\ln\left(\cos(1/x)\right)\sim 1/x^2$. Эту оценку можно выполнить по формуле (8) или (9)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\beta+1}\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^{\beta}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\cos\left(1/x\right)\right)}{1/x}\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to+\infty} x^{\beta}\frac{\sin\left(1/x\right)}{\cos\left(1/x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\beta-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\cos\left(1/x\right)}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(1/x\right)}{1/x}\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to+\infty} x^{\beta-1}=0,\ \exists 0<\beta<1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\cos\left(1/x\right)}=1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(1/x\right)}{1/x}=1\,.$$

Интеграл сходится.

Радикальный признак Коши для несобственных интегралов в конечной и предельной формах имеет вид

$$\sqrt[x]{x^{\beta+1}\cdot f(x)}\le 1 \ \text{ при } \ x\ge x_o,\ \beta>0; \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{f(x)}\le 1\,. \qquad (10)$$

Пример. Оценим сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\left(1+1/x\right)^{x^2}dx$, используя предельную форму радикального признака Коши (10)

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\left(1+1/x\right)^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+1/x\right)^{x}=e>1$. Интеграл расходится.

Выводы

В работе предложены два представления признака сравнения в предельной форме. Признак сравнения с параметром основан на обобщенно гармоническом ряде как эталонном. В отличие от обычного признака, наш признак содержит параметр, который делает теорию более гибкой. При этом наблюдается следующее.

1. Показано, что необходимый признак сходимости в традиционной форме $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ может быть заменен признаком $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$ с более широкими возможностями.

2. Показано, что в ряде случаев предельный признак сравнения является более эффективным, чем признак сравнения в конечной форме, и проще в применении, чем использование интегрального признака Коши.

3. Показано, что радикальный признак Коши и признак Даламбера следуют из признака сравнения с параметром. Кроме того, получен новый вариант радикального признака Коши, который может оказаться более эффективным в ряде случаев.

4. Результаты переносятся на несобственные интегралы.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1970. – Т. I. – 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Изд-во ФМЛ, Москва, 1956. – Т. 1. – 472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, Изд-во ФМЛ, 1972. – Т. 2. – 795 с.
4. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra / T.M. Apostol.– John Wilay and Sons, Inc., 1966. – Vol. 1. – 667 p.
5. Wrede R. Theory and Problems of Advanced Calcolus / R. Wrede, M. Spiegel. – Schaum's Series, The MacGraw-Hill Companies Inc. 2002 (First Edition 1966). – 433 p.

Literatura

1. Kudryavtsev L.D. Matematichesky Analiz. Tom 1. Nauka. 1970. 571 s.
2. Iliyn V.A. Osnovy matematicheskogo analiza. Tom 1. M.: Izd-vo FML. Moskwa. 1956.472 s.
3. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsialnogo i integralnogo isccisleniya. Tom 1. M.: Izd-vo FML. Moskwa. 1972. 795 s.
4. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. John Wilay and Sons, Inc. 1966. 667 p.
5. Wrede R., Spiegel M. Theory and Problems of Advanced Calcolus. – Schaum's Series, The MacGraw-Hill Companies Inc. 2002 (First Edition 1966). 433 p.

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko

Test of Comparison with Parameter in the Theory of Number Series

In the paper, two forms of limiting comparison tests for estimation of convergence of the number series and improper integrals are proposed. It is shown that the Riemann zeta-function $\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ allows to formulate the new necessary test of convergence of the series to get such well-known tests as Cauchy's Root Test and d'Alembert's Ratio Test. The new test with a parameter allows to use l'Hopital's rule more effectively.

The limiting comparison test for arbitrary series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \ge 0$ and zeta-function $v_n = 1/n^{\alpha}, \alpha > 1$ is $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{1/n^{\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} \cdot u_n$. Let $\alpha = \beta + 1$ and we take into account that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} = \begin{cases} \beta > 0 - convergence \\ \beta \le 0 - divergence \end{cases}$ Then: *if the limit*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta+1} \cdot u_n = C < \infty \tag{1}$$

exists and has a limited value and $\beta > 0$ *then the series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \ge 0$ is *convergence*; *in other cases for* $\beta \le 0$ *(or* $C = \infty$ *or the limit does not exists) it is divergence.*

This test we will call a limiting comparison test with a parameter (β). We can right down the test (1) in the other form. According to the necessary test for series $u_n \to 0$, therefore $u_n^{-1} = 1/u_n \to \infty$ at $n \to \infty$ and we can apply l'Hopital's rule:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta} \lim_{n\to\infty} n \cdot u_n = \lim_{n\to\infty} n^{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{u_n^{-1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta} \lim_{n\to\infty} \frac{n'}{\left(u_n^{-1}\right)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta}}{\left(u_n^{-1}\right)'} .$$

In the result we have

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta} / \left(u_n^{-1}\right)' = C < \infty \tag{2}$$

Some deductions.

1. The new necessary test of a convergence of number series with nonnegative terms. Let the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \ge 0$ is convergence. Then the equality (1) is satisfied at some $\beta > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta+1} u_n = \lim_{n\to\infty} n^{\beta} \cdot n u_n = \lim_{n\to\infty} n^{\beta} \cdot \lim_{n\to\infty} n u_n = C < \infty , \tag{3}$$

Since $\lim_{n\to\infty} n^{\beta} = \infty$ at any $\beta > 0$, then $\lim_{n\to\infty} n u_n = 0.$ Thus we have the necessary test:

$$\lim_{n\to\infty} n u_n = 0 . \tag{4}$$

We may get the other form of the necessary test, which consequences from the formula (2)

$$\lim_{n\to\infty} 1/\left(u_n^{-1}\right)' = 0 . \tag{5}$$

The tests (4) and (5) have more possibilities with respect to the usual test $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. For example, the series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n+2}$ is divergence although the necessary convergence test $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = 0$ is fulfilled. On the other hand, our test (4) $\lim_{n\to\infty} n u_n = \lim_{n\to\infty} n/\sqrt{n} = \infty$ means that the series is divergence.

2. Improper integrals. We will remind that the integral test establishes an equivalence between series $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ and improper integrals $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ about of a convergence and divergence [1-2].

The integral test allows to get formulas as (1)-(5) for improper integrals. Briefly:

$$\textit{if } \exists\beta > 0,\ \lim_{x\to+\infty} x^{\beta+1} f(x) = C < \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \ \text{convergence.}$$

$$\textit{if } \exists\beta > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{\varphi'(x)} = C < \infty, \varphi(x) = 1/f(x) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \ \text{convergence.}$$

A new necessary test of a convergence of improper integrals with nonnegative functions is

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0 \ \text{ or } \lim_{x\to+\infty} 1/\left(g(x)\right)' = 0,\ \ g(x) = \left(f(x)\right)^{-1}.$$

The main results of the paper

1. It is shown that the classical necessary test $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ may be replaced by the test $\lim_{n\to\infty} n u_n = 0$, which has more wide possibilities.
2. It is shown that in many cases the limiting comparison test with a parameter is more effective than usual comparison test or integral test.
3. It is shown that the root and ratio tests can be gained in the frame of the comparison test with a parameter.
4. The results can be expanded to improper integrals.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.